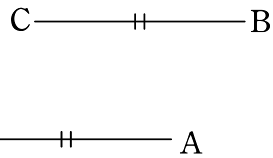
〔20 埼玉医科大〕

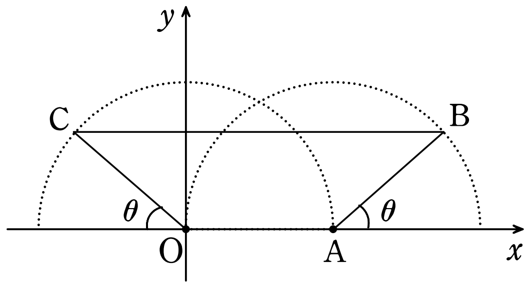
4 辺のうち，3 辺の長さが $a$ である台形の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{8}\sqrt{\boxed{9}}}{\boxed{10}}a^{\boxed{11}}$

解答




台形を OABC とし，OA＝ $a$ とする。BC＝ $a$ とすると，2 辺または 4 辺の長さが等しくなるため題意を満たさない。よって，OA＝AB＝CO＝ $a$ である。

ここで，O を原点とする $xy$ 平面を考え，A $(a,\ 0)$ とすると，点 B は中心が A で半径 $a$ の円周上にあり，点 C は中心が O で半径 $a$ の円周上にある。




$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $x$ 軸の正方向のなす角を $\theta$ とする。

面積の最大値を考えたいので $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として良く，台形となるとき点 B と C の $y$ 座標が等しくなることから，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $x$ 軸の正方向のなす角は，$\pi-\theta$ である。よって，B $(a+a\cos\theta,\ a\sin\theta)$，C $(-a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ と表せるから，台形の面積 $S$ は，

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{BC})\cdot a\sin\theta$$

$$=a^2(1+\cos\theta)\sin\theta \qquad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

となります。あとは微分して増減表を書けば $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最大であることがわかります。

よって，最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ であることがわかる。